บริษัท ไฮฟ์กราวนด์ จำกัด

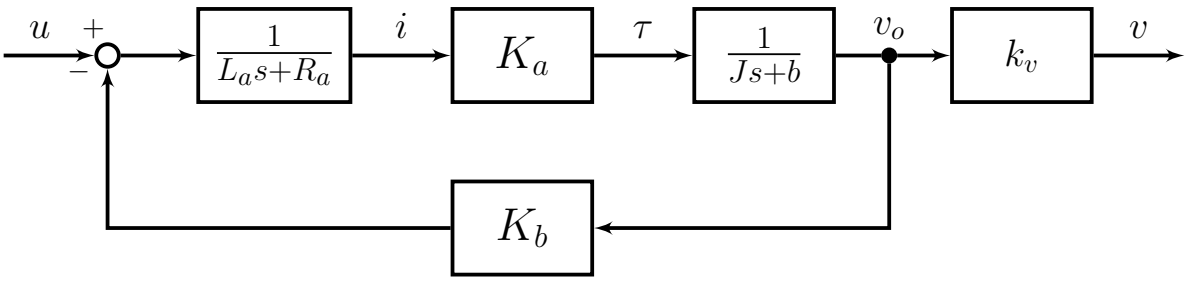
ตัวอย่างการทดลอง
ชุดปฏิบัติการควบคุมการเคลื่อนที่
มอเตอร์กระแสตรง รุ่น 3.0

ตัวอย่างการทดลอง
ชุดปฏิบัติการการควมคุมการเคลื่อนที่มอเตอร์กระแสตรง

สารบัญ

1	ค่าคงที่ต่าง ๆ ของมอเตอร์จากผู้ผลิต	2
2	ตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบด้วยวิธีผลตอบสนองเชิงเวลา	3
3	ตัวอย่างการศึกษาลักษณะสมบัติของผลตอบสนองระบบวงปิด	4
4	ตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบด้วยวิธีผลตอบสนองเชิงความถี่	8
5	ตัวอย่างการทดลองออกแบบตัวควบคุม PD ด้วยวิธีทางเดินรากโลคัส	9
6	ตัวอย่างการทดลองออกแบบตัวควบคุม PID ด้วยวิธี Ziegler-Nichols	11
7	ตัวอย่างการทดลอการออกแบบตัวควบคุม PD ด้วยวิธีผลตอบสนองเชิงความถี่	14

1 ค่าคงที่ต่าง ๆ ของมอเตอร์จากผู้ผลิต



รูปที่ 1: แผนภาพกรอบแสดงโมเดลของมอเตอร์กระแสตรง $G(s)$

K_a	อัตราส่วนของแรงบิดมอเตอร์	56 $\pm 10\%$	mNm/A
K_b	อัตราส่วนของแรงเคลื่อนเหนี่ยวนำย้อนกลับ	56 $\pm 10\%$	mVs/rad
R_a	ค่าความต้านทานของขดลวดอาเมเจอร์	7.3	Ω
L_a	ค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดอาเมเจอร์	6	mH
b	ค่าความหน่วงของมอเตอร์	1	mNm/krpm
J	โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์	$1,750$	$\mathrm{g \cdot cm^2}$
k_v	ค่าคงตัวในการแปลงความเร็วในหน่วย rad/s ไปเป็นหน่วยรอบต่อนาที (rpm)	$60/2\pi$	
k_s	ค่าคงตัวในการแปลงหน่วยรอบต่อนาทีไปเป็นองศาต่อวินาที	6	

2 ตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบด้วยวิธีผลตอบสนองเชิงเวลา

ระบบของมอเตอร์กระแสตรงมีสมการของระบบดังต่อไปนี้

$$G(s) = \frac{K_a k_v}{(L_a s + R_a)(Js + b) + K_a K_b} \tag{1}$$

ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพกรอบได้ดังรูป 1 เมื่อ $L_a = 0$ จะได้ว่า

$$G(s) = \frac{K_a k_v}{R_a J s + (R_a b + K_a K_b)} \tag{2}$$

ซึ่งจะเขียนในรูปของระบบอันดับหนึ่งได้ว่า

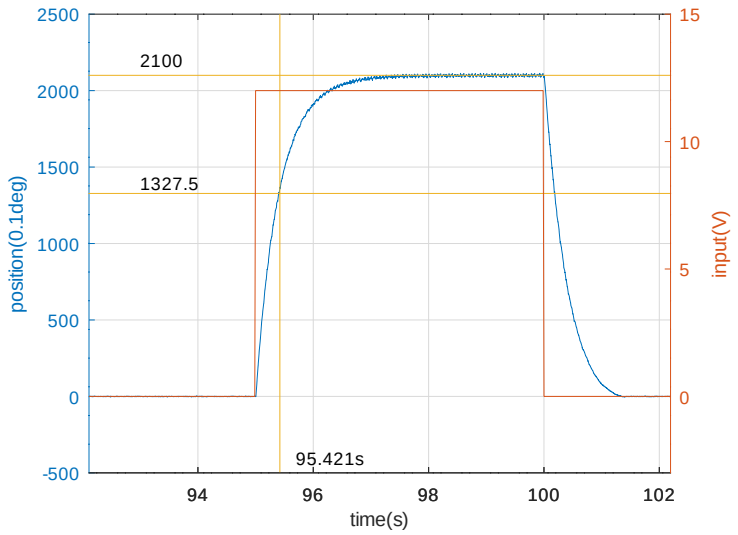
$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{3}$$

โดยที่

$$K = \frac{K_a k_v}{R_a b + K_a K_b}, \tag{4}$$

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a b + K_a K_b} \tag{5}$$

จากค่าคงที่ต่าง ๆ ของมอเตอร์คำนวณ K เมื่อไม่มีความหน่วงเพิ่มเติมได้เท่ากับ 170.13 และ τ ได้เท่ากับ 0.4064 จากผลการทดสอบค่าสูงสุดของความเร็วรอบมอเตอร์อยู่ที่ $2,100\,\mathrm{rpm}$ เมื่อสัญญาณขาเข้าเป็น $u =$



รูปที่ 2: ผลตอบสนองทางเวลาของมอเตอร์เมื่อมีในกรณีที่ไม่มีโหลด ($u = 12\,\mathrm{V}$)

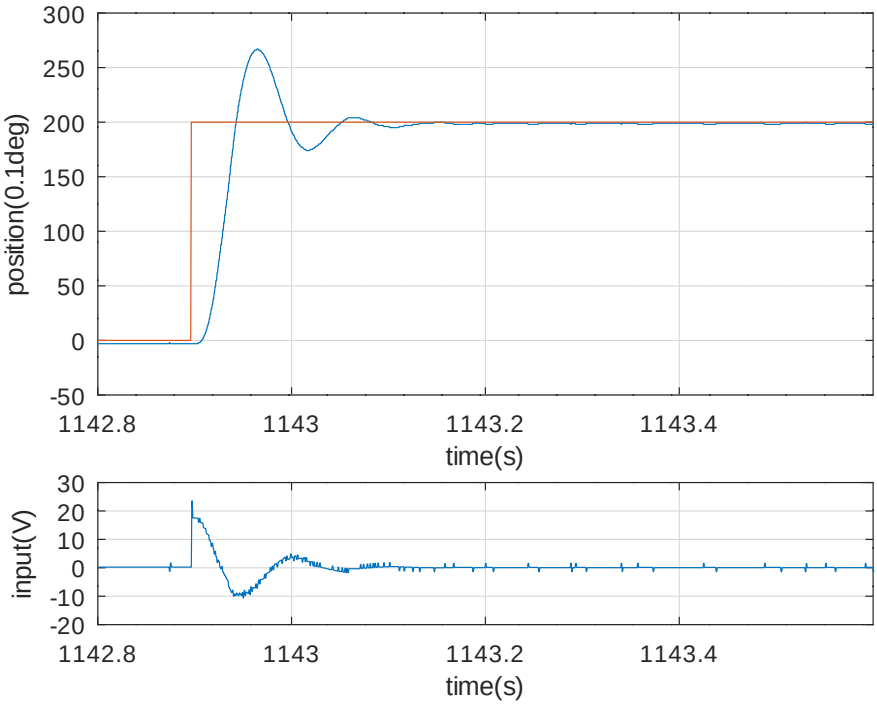
$12\,\mathrm{V}$ เราจึงสรุปได้ว่าค่า K จากผลการทดลองอยู่ที่ 175 เราทราบว่าผลตอบสนองทางเวลาของระบบคือ $v(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ เมื่อแทน $t = \tau$ เราจะทราบว่าผลตอบสนองของระบบจะอยู่ที่ 63.21% ของค่าสูงสุด $(2,100\,\mathrm{rpm})$ ซึ่งอยู่ที่ $(1,327.5\,\mathrm{rpm})$ ที่เวลา 0.421 วินาที ดังนั้นระบบนี้จึงมีค่า K และ τ ใกล้ค่าที่คำนวณได้จากผู้ผลิต

3 ตัวอย่างการศึกษาลักษณะสมบัติของผลตอบสนองระบบวงปิด

จำลองการควบคุมตำแหน่งมอเตอร์วงปิดโดยใช้โหมด one-shot และปรับค่าพารามิเตอร์ตัวควบคุมเป็น 4 แบบดังนี้ จากผลการทดลอง $K_P = 1.8$, $K_D = 0.03$ ได้ผลการทดลองเป็น under-damped ดังรูป

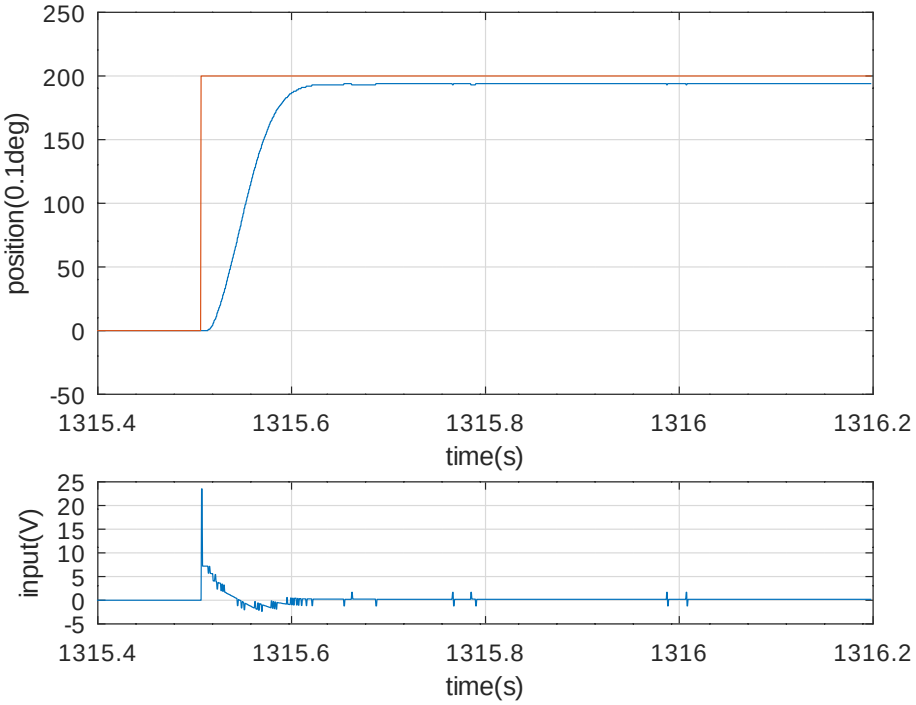
$$
\begin{aligned}
K_P &= 1.8, \quad & K_D &= 0.03 \\
K_P &= 0.75, \quad & K_D &= 0.03 \\
K_P &= 0.75, \quad & K_D &= 0.06 \\
K_P &= 8, \quad & K_D &= 0.03
\end{aligned}
$$

ที่ 3 การทดลอง $K_P = 0.75$, $K_D = 0.03$ ได้ผลการทดลองเป็น critical damped ดังรูปที่ 4 การทดลอง $K_P = 0.75$, $K_D = 0.06$ ได้ผลการทดลองเป็น over-damped ดังรูปที่ 5 การทดลอง $K_P = 8$, $K_D = 0.03$ ได้ผลการทดลองที่ unstable ดังรูปที่ 6 และเมื่อทดลองปรับค่า K_P และ K_D ให้ต่างจาก

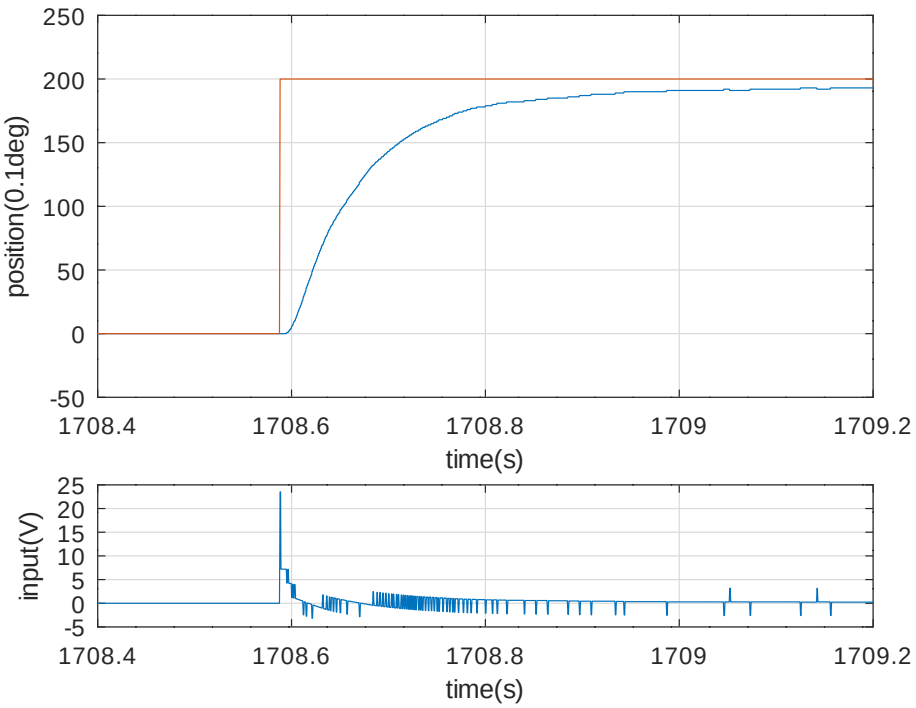


รูปที่ 3: ผลตอบสนองแบบขั้นของการควบคุมตำแหน่งด้วยตัวควบคุม PD โดย $K_P = 1.8$, $K_D = 0.03$

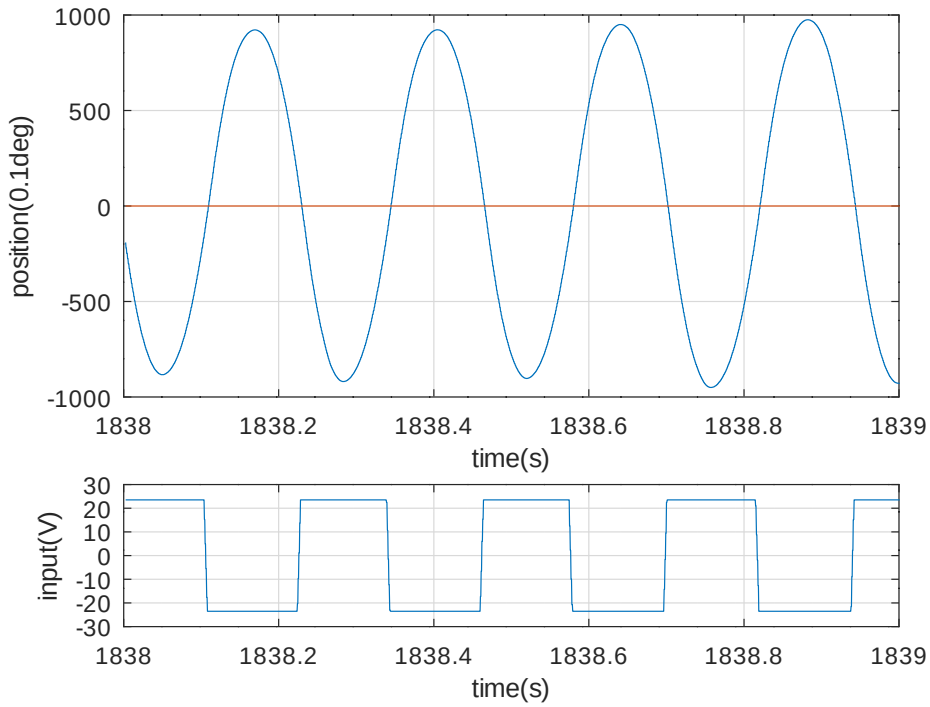
$K_P = 1.8$, $K_D = 0.03$ โดยที่ยังคงคุณสมบัติผลตอบสนองทางเวลาเป็น under-damped นั้น ได้ค่า $K_P = 0.8$ และ $K_D = 0.02$ ซึ่งเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาระหว่างสองการทดลองได้ดังตารางที่ 1 และมีผลการทดลองดังรูปที่ 7



รูปที่ 4: ผลตอบสนองแบบขั้นของการควบคุมตำแหน่งด้วยตัวควบคุม PD โดย $K_P = 0.75$, $K_D = 0.03$



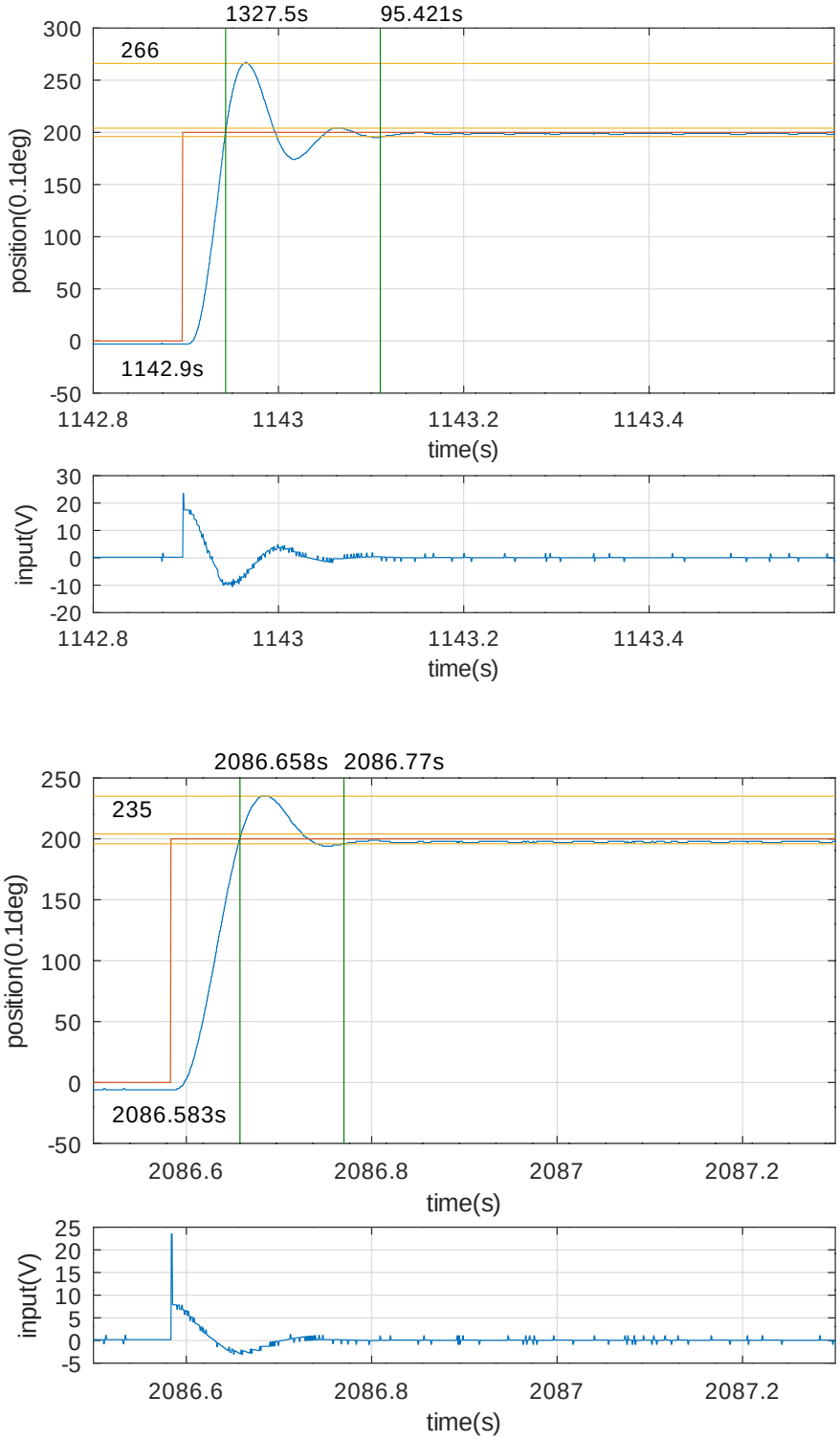
รูปที่ 5: ผลตอบสนองแบบขั้นของการควบคุมตำแหน่งด้วยตัวควบคุม PD โดย $K_P = 0.75$, $K_D = 0.06$



รูปที่ 6: ผลตอบสนองแบบขั้นของการควบคุมตำแหน่งด้วยตัวควบคุม PD โดย $K_P = 8$, $K_D = 0.03$

K_P,	K_D	M_p	t_r	t_s
$K_P = 1.8$,	$K_D = 0.03$	33%	43 ms	210 ms
$K_P = 0.8$,	$K_D = 0.02$	17.5%	75 ms	187 ms

ตารางที่ 1: เปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเวลาของการควบคุมตำแหน่งด้วยตัวควบคุม PD สองชุด ระหว่าง $K_P = 1.8$, $K_D = 0.03$ และ $K_P = 0.8$, $K_D = 0.02$



รูปที่ 7: ผลตอบสนองแบบขั้นของการควบคุมตำแหน่งด้วยตัวควบคุม PD โดย $K_P = 1.8$, $K_D = 0.03$ (รูปบน) และผลตอบสนองแบบขั้นของการควบคุมตำแหน่งด้วยตัวควบคุม PD โดย $K_P = 0.8$, $K_D = 0.02$ (รูปล่าง)

4 ตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบด้วยวิธีผลตอบสนองเชิงความถี่

เมื่อพิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาเมื่อกำหนดให้สัญญาณขาเข้า $u(t) = A\sin(\omega t)$ เราจะได้ผลตอบสนองที่ความถี่ใด ๆ เป็น $v(t) = B\sin(\omega t + \phi)$ เราสามารถเขียน $v(t)$ ได้เป็น

$$v(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \tag{6}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า B และ ϕ สัมพันธ์กับ c_1 และ c_2 ดังนี้

$$B = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \phi = \arctan\frac{c_1}{c_2} \tag{7}$$

เมื่อชักตัวอย่างของสัญญาณขาออก จำนวน n ค่า จะได้ว่า

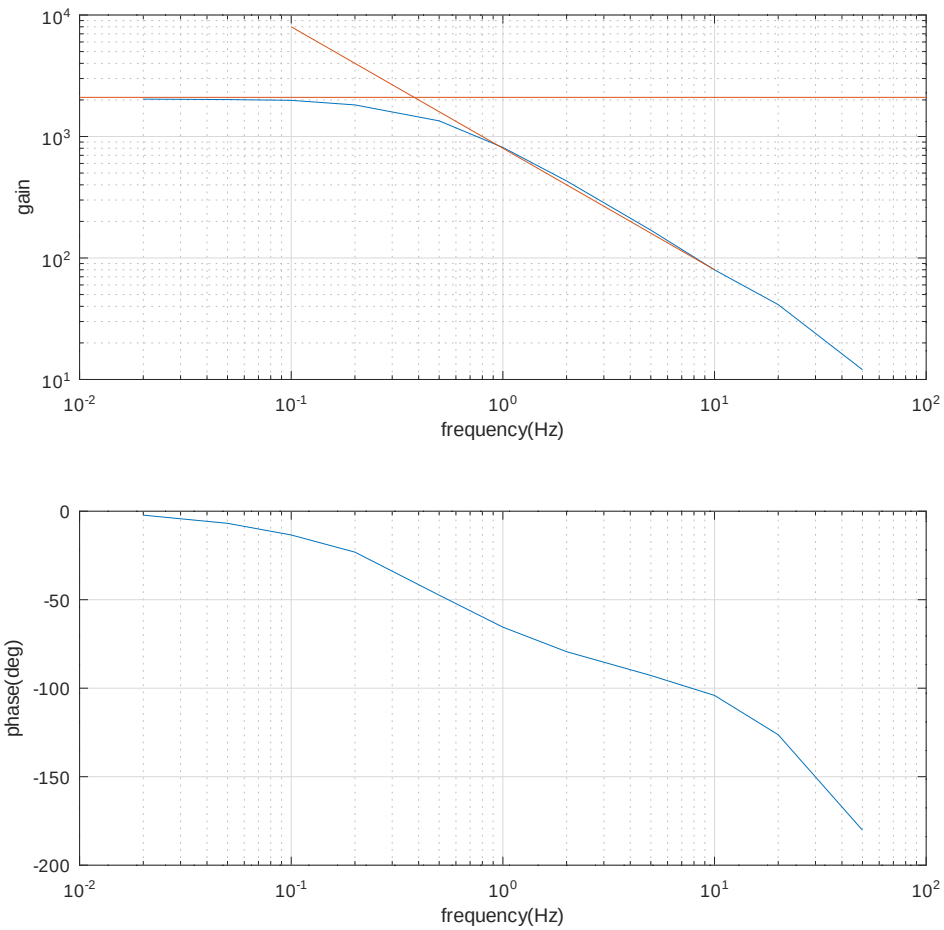
$$\begin{bmatrix} \sin(\omega T) & \cos(\omega T) \\ \sin(\omega 2T) & \cos(\omega 2T) \\ \sin(\omega 3T) & \cos(\omega 3T) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega nT) & \cos(\omega nT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(T) \\ v(2T) \\ v(3T) \\ \vdots \\ v(nT) \end{bmatrix} \tag{8}$$

จากผลการสุ่มเราจะสามารถหา c_1 และ c_2 ได้ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด (least squares method) จากการหาเมทริกซ์ผกผันเทียม (Pseudo Inverse Matrix) จากผลการสุ่มผลตอบสนองจากหลายความถี่ ซึ่งได้ผลการทดลองตามตารางดังต่อไปนี้ เมื่อนำมาหากำหนดจุดในแผนภาพโบเดจะได้

ความถี่ (Hz)	c_1	c_2	อัตราขยาย	เฟส (deg)	เฟสต่อเนื่อง (deg)
0.02	2028.83	-79.011	2030.37	-2.23	-2.23
0.05	1999.56	-239.69	2013.87	-6.84	-6.84
0.1	1930.21	-461.01	1984.50	-13.43	-13.43
0.2	1673.31	-714.84	1819.61	-23.13	-23.13
0.5	909.68	-990.33	1344.72	-47.43	-47.43
1	337.07	-739.92	813.08	-65.51	-65.51
2	79.388	-423.121	430.50	-79.37	-79.37
5	-8.3047	-169.2989	169.50	87.19	-92.81
10	-19.445	-77.456	79.86	75.91	-104.09
20	-24.462	-33.297	41.32	53.70	-126.30
50	-12.036	0.041408	12.04	-0.20	-180.20

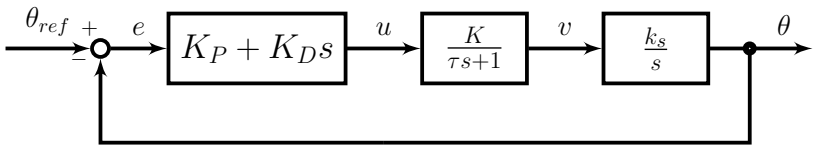
ตารางที่ 2: ตารางการทดลองหาผลตอบสนองความถี่ของระบบเมื่อไม่มีโหลด ($u = 12\,\mathrm{V}$)

เมื่อวิเคราะห์ดูจะพบว่าความถี่หักมุมอยู่ที่ประมาณ $0.4\,\mathrm{Hz}$ ซึ่งแปลงเป็นค่าคงตัวเวลาจะได้ $\tau = 0.3979$ วินาทีใกล้เคียงกับค่าที่วัดได้กับผลตอบสนองทางเวลาและค่าที่คำนวณได้จากผู้ผลิตมอเตอร์



รูปที่ 8: ผลตอบสนองทางความถี่ของมอเตอร์เมื่อมีในกรณีที่ไม่มีโหลด ($u = 12\,\mathrm{V}$)

5 ตัวอย่างการทดลองออกแบบตัวควบคุม PD ด้วยวิธีทางเดินรากโลคัส



รูปที่ 9: แผนภาพกรอบแสดงการควบคุมตำแหน่งของมอเตอร์แบบป้อนกลับด้วยตัวควบคุม PD เมื่อกำหนดให้ระบบของมอเตอร์เป็นตำแหน่ง

เมื่อหาแผนภาพของระบบวงปิดในรูปที่ 9 จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการ เมื่อดูจากสมการ เราจะเลือก K_P และ K_D เมื่อให้ $C(s) = K_P + K_D s$ และ $G(s) = \frac{Kk_s}{s(\tau s+1)}$ ระบบรวมหลังเกิดการป้อนกลับจะเป็น

$$H(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \tag{9}$$

จากการหาการตอบสนองระบบที่ต้องการด้วยการกำหนด Maximum Overshoot (M_p) เป็น 10% และ Setting time (t_s) $\pm 2\%$ เป็น 0.2 วินาที เราสามารถหา ζ และ ω_n ได้จากสมการ (10)

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \qquad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{10}$$

จะได้ว่า $\zeta = 0.5912$ และ $\omega_n = 33.829$ ทำให้เราได้ pole ของระบบที่ต้องการเป็น

$$s_0 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -20 \pm j27.284 \tag{11}$$

เมื่อใช้ค่าคงที่ระบบที่คำนวณจากผู้ผลิต ประมาณได้ว่าระบบหลังจากแปลงให้เป็นหน่วยองศาแล้วมีฟังก์ชันส่งผ่านเป็น

$$G(s) = \frac{1020}{s(0.4s+1)} \tag{12}$$

คำนวณหามุมชดเชยจาก $s_0 = -20 + j27.284$

$$\angle(-20 + j27.284 + 2.5) = 122.68^\circ \tag{13}$$

$$\angle(-20 + j27.284) = 126.24^\circ \tag{14}$$

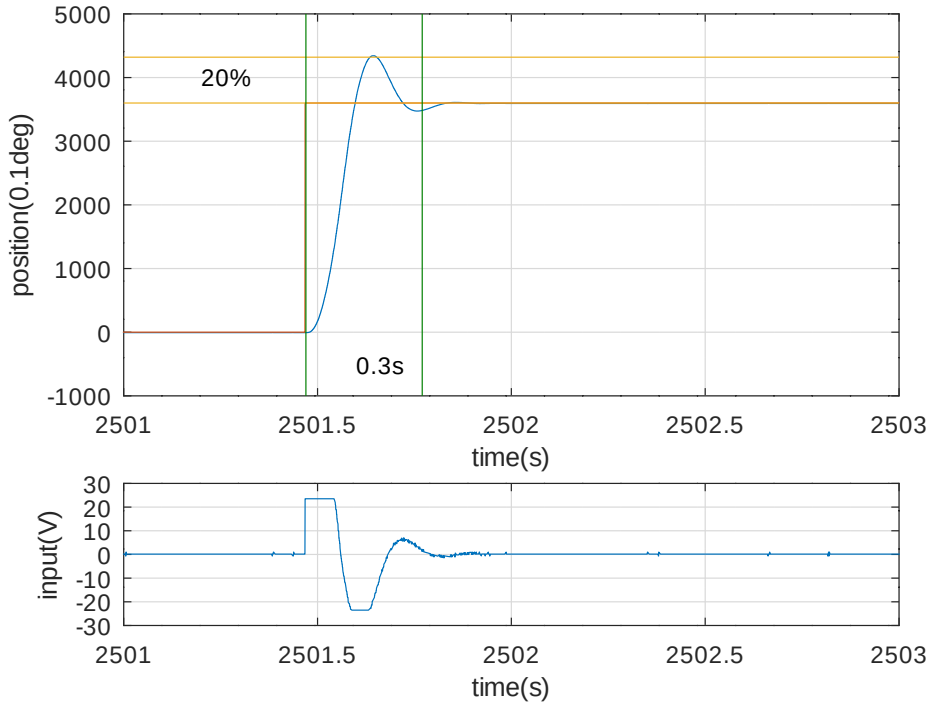
จะได้ว่ามุมที่ขาดหายไปคือ $122.68 + 126.24 - 180 = 68.92^\circ$ จากนั้นเมื่อกำหนดให้ $C(s) = K_P(1 + T_D s)$ มุมระหว่าง s_0 และ zero จาก $C(s)$ ที่อยู่บนแกน x จะอยู่ที่ตำแหน่ง

$$-1/T_D = -20 - 27.284\cot(68.92) = -30.517 \tag{15}$$

จะได้ว่า T_D มีค่าเท่ากับ 0.03277 คำนวณหา K_P จากเงื่อนไขที่ขนาดของตำแหน่ง pole ในระบบวงปิดใหม่จะต้องมีขนาดเท่ากับ 1 หรือ $|C(s)G(s)| = 1$ จะได้ว่า

$$\left| K_P(T_D s_0 + 1)\frac{1020}{s_0(0.4s_0+1)} \right| = 1 \tag{16}$$

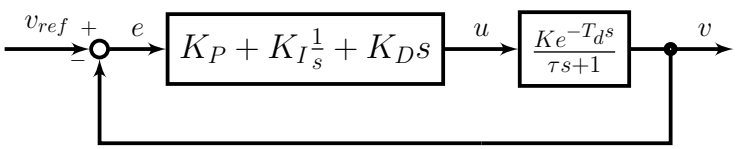
จากการคำนวณจะได้ว่า $K_P = 0.5330$ และ $K_D = 0.01747$ ทำให้ได้ผลตอบสนองดังรูปที่ 10



รูปที่ 10: ผลตอบสนองของการป้อนกลับมอเตอร์ด้วยตัวควบคุมที่ออกแบบด้วย Root Locus ในกรณีที่ไม่มีโหลด ($u = 12\,\mathrm{V}$)

6 ตัวอย่างการทดลองออกแบบตัวควบคุม PID ด้วยวิธี Ziegler-Nichols

การทดลองนี้เป็นการการควบคุมความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์เมื่อคิดผลของเวลาประวิง T_d ด้วยตัวควบคุม PID โดยจะทำให้ระบบมีการเปลี่ยนแปลงไปดังรูปที่ 11 เมื่อสังเกตุผลตอบสนองแบบขั้นอย่างละเอียดจะพบว่าระบบมีการประวิงโดยประมาณ 5ms ดังรูปที่ 12 สำหรับระบบวงเปิด ผลตอบสนองทางเวลามีความชันต่อหนึ่งโวลต์ประมาณ $416.67\ \mathrm{rpm/s}$ ซึ่งใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณได้จากอัตลักษณ์ของระบบดังนี้ $R = K/\tau = 175 \times 0.421 = 415.67$ และการประวิงเวลาของระบบ $L = 0.005\mathrm{s}$ เมื่ออ้างอิงจากสูตรการคำนวณ Ziegler-Nichols ตามตารางที่ 3 จะสามารถคำนวณค่าคงที่ของตัวควบคุม PID ได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 11: แผนภาพกรอบแสดงการควบคุมความเร็วของมอเตอร์แบบป้อนกลับด้วยตัวควบคุม PID เมื่อระบบมีเวลาประวิง

ชนิดของตัวควบคุม	K_P	T_I	T_D
ตัวควบคุม P	$\frac{1}{RL}$		
ตัวควบคุม PI	$\frac{0.9}{RL}$	$\frac{L}{0.3}$	
ตัวควบคุม PID	$\frac{1.2}{RL}$	$2L$	$0.5L$

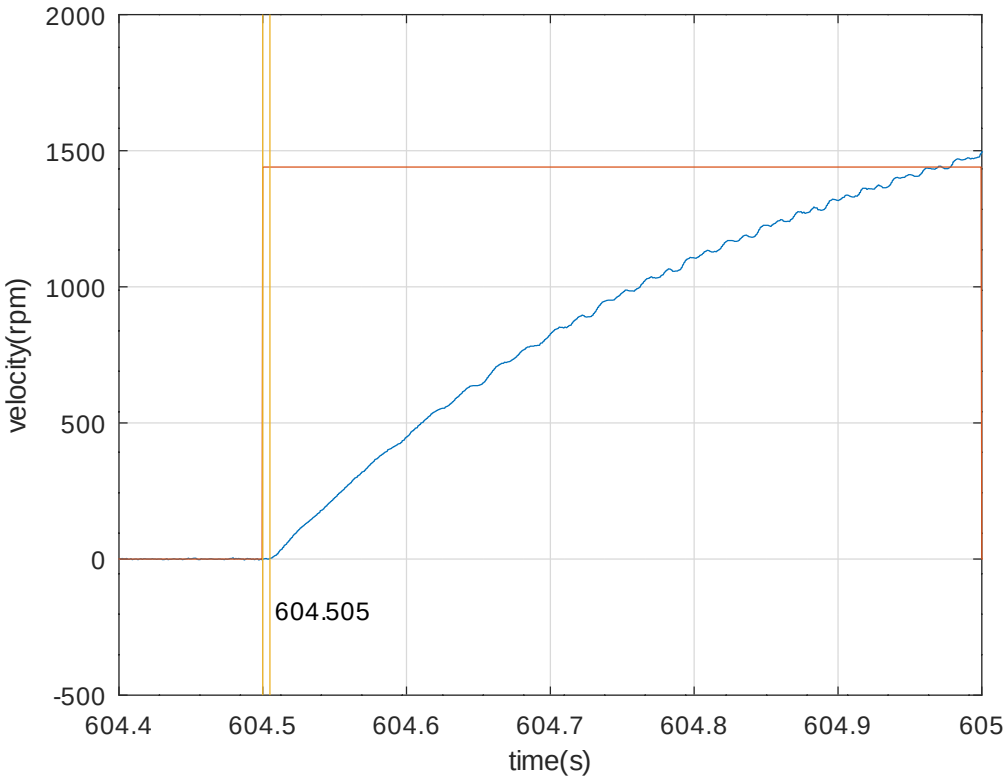
ตารางที่ 3: สูตรการหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PID ด้วยวิธีของ Ziegler-Nichols แบบวงเปิด

$$K_P = \frac{1.2}{RL} = \frac{1.2}{416.67 \times 0.005} = 0.576 \tag{17}$$

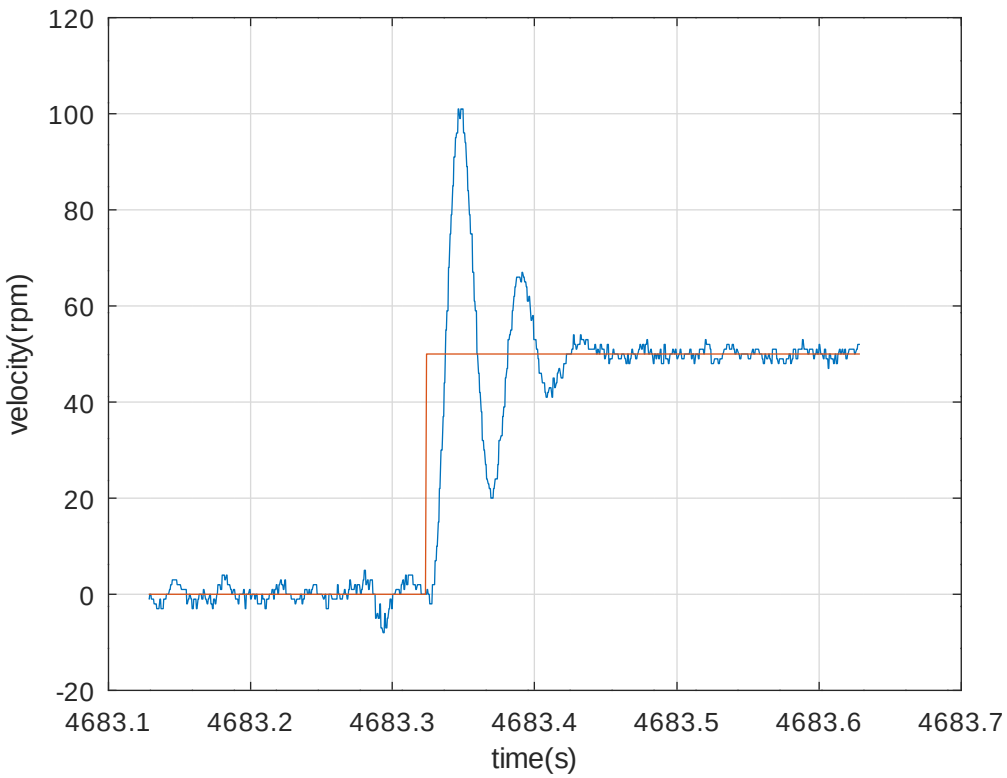
$$T_I = 2L = 2 \times 0.005 = 0.01 \tag{18}$$

$$T_D = 0.5L = 0.5 \times 0.005 = 0.0025 \tag{19}$$

เมื่อนำผลการคำนวณตัวควบคุมด้วยวิธี Ziegler-Nichols แบบวงเปิดมาทำการทดลองควบคุมความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ จะได้ผลการทดลองดังรูปที่ 13 ซึ่งเป็นผลตอบสนองที่เหมาะสมตามวิธีของ Ziegler-Nichols



รูปที่ 12: ผลตอบสนองแบบขั้นของระบบวงเปิดมีการประวิงเวลา



รูปที่ 13: ผลตอบสนองของการป้อนกลับมอเตอร์ด้วยตัวควบคุมที่ออกแบบด้วยวิธี Ziegler-Nichols แบบวงเปิด

7 ตัวอย่างการทดลอการออกแบบตัวควบคุม PD ด้วยวิธีผลตอบสนองเชิงความถี่

ออกแบบตัวควบคุมตำแหน่งมอเตอร์ของระบบดังสมการที่ (20) โดยใช้ตัวควบคุม PD เมื่อกำหนดให้มีข้อกำหนดการออกแบบคือ $P.M. = 45°$, $B.W. = 20$ rad/s, $K_v = 50$ s^{-1}

$$G(s) = \frac{1020}{s(0.4s+1)} \tag{20}$$

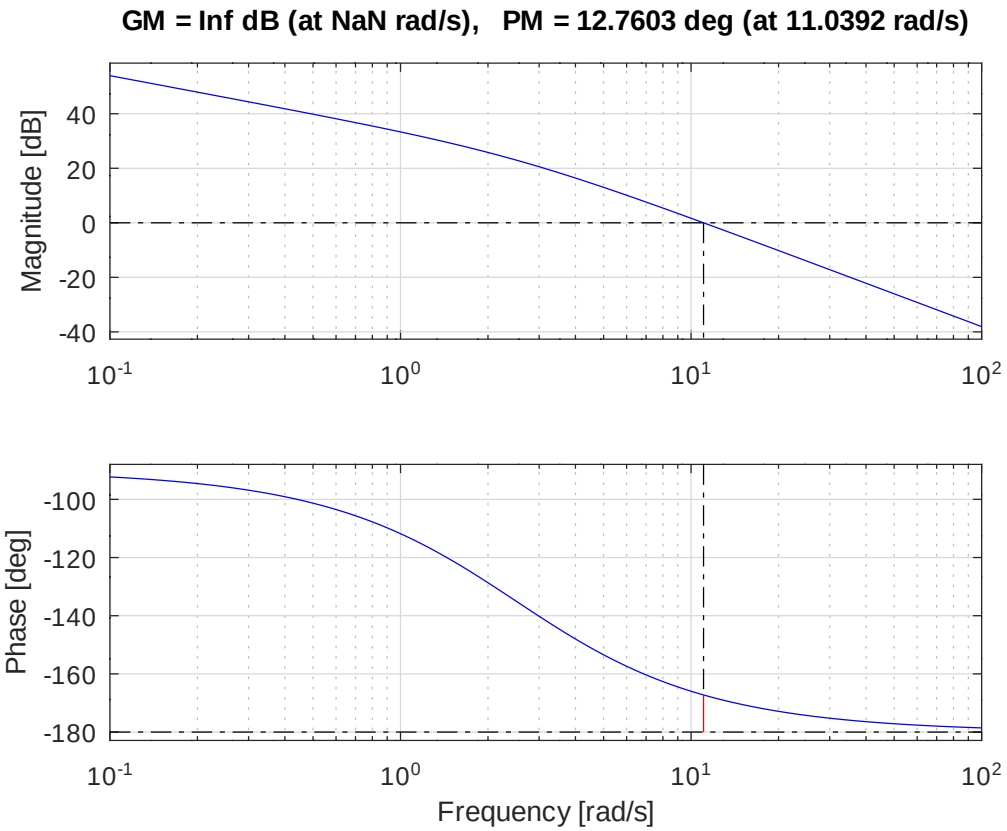
เริ่มจากการคำนวณ K_P จากข้อกำหนด

$$K_v = \lim_{s\to 0} sC(s)G(s) \tag{21}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sK_P\left(T_D s+1\right)\frac{1020}{s\left(0.4s+1\right)} \tag{22}$$

$$K_P = \frac{50}{1020} = 0.049 \tag{23}$$

จากนั้นหาค่า $P.M.$ เมื่อกำหนดให้ $C(s) = K_P = 0.049$ และเขียนแผนภาพโบเด แล้วจึงหามุมชดเชยเพื่อหาค่า T_D แผนภาพโบเดของ $C(s)G(s)$ เมื่อกำหนดให้ $C(s) = 0.049$ แล้วมีลักษณะดังรูปที่ 14 ซึ่งต้อง



รูปที่ 14: แผนภาพโบเดแบบวงเปิดของ $C(s)G(s)$ เมื่อกำหนดให้ $C(s) = 0.049$

ออกแบบให้ $T_D s + 1$ ที่ความถี่ 11 rad/s ชดเชยระบบวงเปิดให้มี $P.M. = 45°$ เนื่องจาก $T_D s + 1$ มีสถานะเป็น lead จึงทำให้ความถี่หลังการชดเชยเคลื่อน จึงต้องชดเชยมุมเพิ่ม $5°$ จากรูปที่ 14 ระบบเปิด

มี $P.M. = 12.8^\circ$ จึงต้องให้พจน์ชดเชยความถี่เพิ่มเติมเท่ากับ $45^\circ + 5^\circ - 12.8^\circ = 37.2^\circ$ ที่ความถี่ 11 rad/s การคำนวณ T_D สามารถทำได้ดังนี้

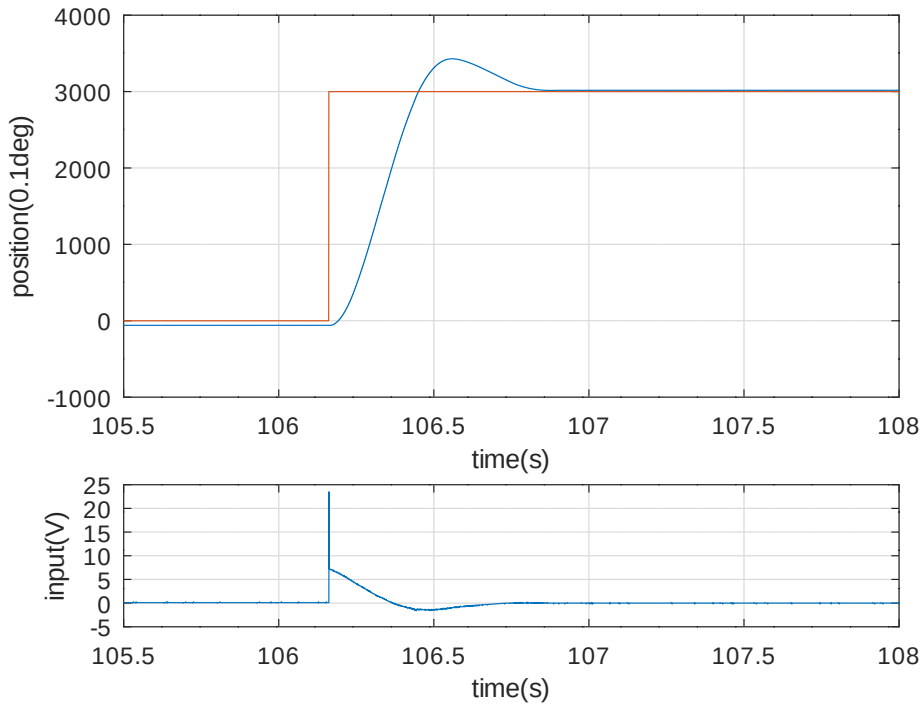
$$37.2^\circ = \arctan(11T_D) \tag{24}$$

$$T_D = \frac{\tan(37.2^\circ)}{11} = 0.069 \tag{25}$$

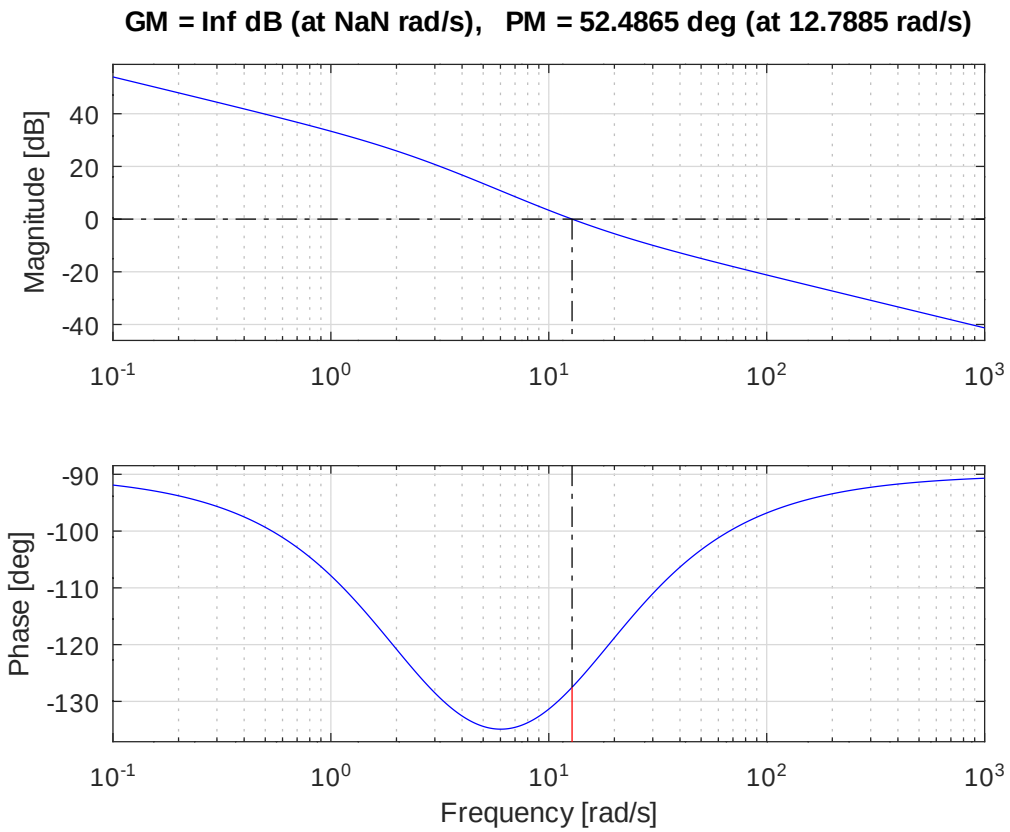
สรุปได้ว่า

$$C(s) = 0.049(0.069s + 1) \tag{26}$$

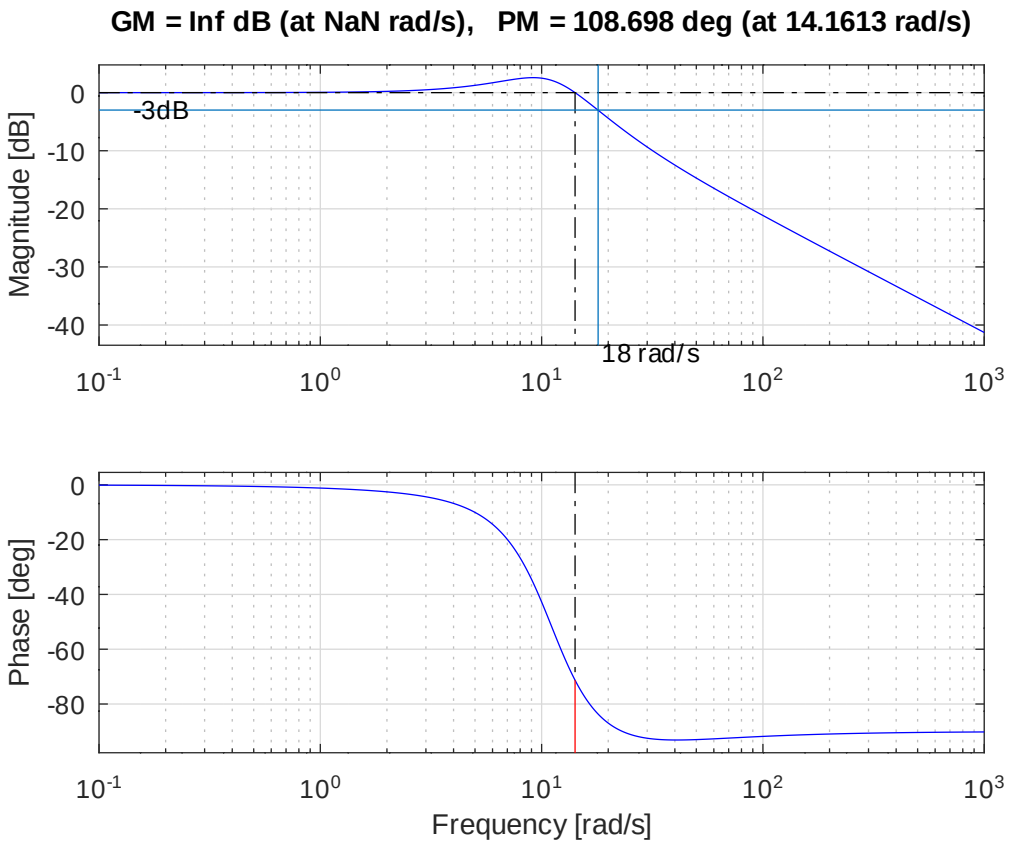
โบเดจากสมการควบคุม (26) มีลักษณะดังรูปที่ 16 ซึ่งมี $P.M. = 52.5^\circ$, $B.W. = 16$ rad/s และ $K_v = 50$ s^{-1} ใกล้เคียงกับลักษณะเฉพาะของวงเปิดที่ตั้งไว้และมีผลตอบสนองแบบขั้นดังรูปที่ 15 จากรูปที่ 17 จะเห็นได้ว่า $B.W.$ ของระบบมีค่าเท่ากับ 18 rad/s



รูปที่ 15: ผลตอบสนองแบบขั้นของระบบวงปิดของ $C(s)G(s)$ เมื่อกำหนดให้ $C(s) = 0.049(0.069s + 1)$



รูปที่ 16: แผนภาพโบเดแบบวงเปิดของ $C(s)G(s)$ เมื่อกำหนดให้ $C(s) = 0.049(0.069s + 1)$



รูปที่ 17: แผนภาพโบเดแบบวงปิดของ $C(s)G(s)$ เมื่อกำหนดให้ $C(s) = 0.049(0.069s + 1)$